トポロジカル・ソリトン解を持つ
ゲージ場理論に現われるカオス

九州芸工大　　河辺　哲次

1 はじめ

素粒子論におけるヤンミルズ場（非可換ゲージ場）方程式の解のカオス構造について以下の事柄が知られている。
1）時空間依存性を持ったヤンミルズ場（ゲージ場）のモノポール解は、摂動に対して不安定であり、カオスを生じる[1,2]。
2)ヤンミルズ・ヒッグス系に対しては、レギュラー相とカオス相の二相が存在する[3]。
3）場の一様な空間近似モデルでも、二相構造が現われる[4]。
SO(3)モノポール解は、ゲージ場理論における有限エネルギーのトポロジカルなソリトン解の一例である。このようなトポロジカルなソリトン解としては、他に、U(1)ヴォルテックス解[5]やSU(2)スファレロン(sphaleron)と呼ばれる鞍部点解[6]等が知られている。これらの解も、物理的に重要であり様々な角度から個別に調べられている。

本研究会では、この様なソリトン解も、一様な空間近似の枠内では二相構造が見られること、従って、モノポールで見い出された二相構造が、ソリトン解を持つゲージ場理論に共通した現象である可能性が強いことを議論した。この報告書では特にスファレロン解に話題を絞る。

2　モデル

複素スカラー場とゲージ場の相互作用を次式で定義する：

$$L=-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+(D_{\mu}\phi)^{+}_{a}(D^{\mu}\phi)_{a}-V(\phi)$$

$$V(\phi)=\lambda(\phi_i^{+}\phi_i-\frac{1}{2}\mathrm{v}^2)^2$$

$$(D_{\mu}\phi)_i=\partial_{\mu}\phi_i-ig(A_{\mu})_{ij}\phi_j$$

$$(A_{\mu})_{ij}=A^{a}_{\mu}T^{a}_{ij}\quad\in\ G$$

場が空間に関して一様であるという仮定をおく：

$$A_i^a = A_i^a(t) \qquad\qquad \phi_a = \phi_a(t)$$

この結果、ラグランジアンから次の運動方程式を得る：

$$\ddot{A}_i^a + g^2(A_i^a A_j^b - A_j^a A_i^b)A_j^b + g^2 A_i^b \phi^+ \left\{T^a, T^b\right\}\phi = 0$$

$$\ddot{\phi}_a + g^2 A_i^l A_i^m T_{ab}^l T_{bc}^m \phi_c + 2\lambda(\phi_j^+ \phi_j - \frac{1}{2}\mathrm{v}^2)\phi_a = 0$$

今、SU(2)スファレロン解の場合にヤンミルズ場とスカラー場を次式のように仮定する：

$$A_i^a = \varepsilon_{aij} a_j(t) \qquad\qquad \phi = i\vec{\tau}\cdot\vec{b}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

この時、次のようなハミルトン力学系を得る。

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + W(x,y)$$

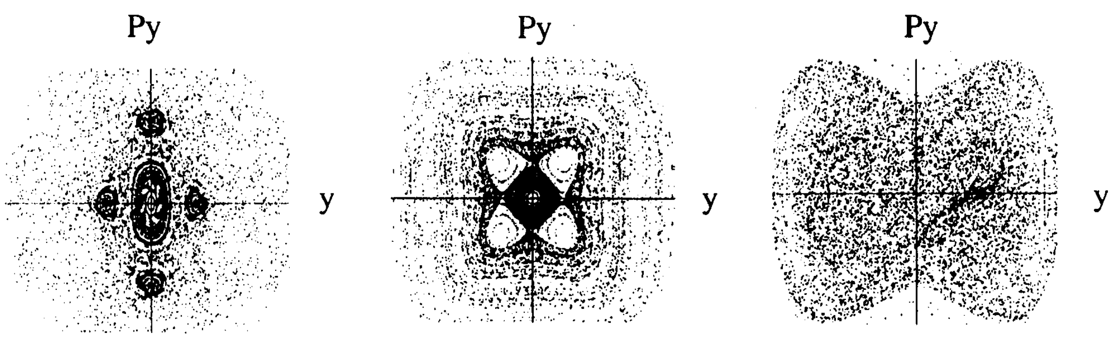
$$W(x,y) = \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{\alpha}{2}x^2y^2 + \frac{\kappa}{4}(y^2-1)^2$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{g^2} \qquad\qquad \alpha = \frac{1}{4} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

このハミルトン力学系は、明らかにモノポール解の場合と同じ数学的構造をしている[4]。

3　ハミルトン力学系のダイナミックス

このハミルトニアンは、ポテンシャルW(x,y)内部での粒子の運動を記述する。従って、この系のダイナミックスを調べるために、先ず、粒子軌道のポアンカレ断面を調べる。ポアンカレ断面は、$x=0$, $Px \geqq 0$で定義し、(y , Py)平面上のプロットで与える。初期値を３０個とって計算した結果を次に示す。



$\kappa = 0.001$　　　$\kappa = 0.1$　　　$\kappa = 1.0$

次に、位相空間に占めるカオス相とレギュラー相の割合が、結合定数の大きさと共にどのように変化するかを調べる。このために、位相空間を50×50の格子点に分け、この格子点を初期値としてリアプノフ指数を結合定数毎に求めた。この結果を次の表に示す。

κ	0.001	0.01	0.1	1.0	5.0
chaos /(chaos + order)	0.62	0.24	0.01	0.94	0.01

結合定数の値によって、ほぼレギュラー相だけ（$\kappa = 0.1$）の場合と、カオス相だけ（$\kappa = 1.0$）の場合が実現し、その間の相転移の存在も分かる。このように、結合定数の大きさと共に位相空間に占めるカオス相とレギュラー相の割合が変化するが、これは、ポテンシャルのトポロジーが変化する事にも対応している。

4　まとめと課題

スファレロン解の場合にも、モノポール解と同じようにレギュラー相とカオス相が、κの大きさに依存して出現する事が分かった。この結果は、スカラー場の表現がSO(3)モノポール解の場合はアジョイント表現に属し、SU(2)スファレロン解の場合が基本表現に属するという事に注意すれば、ある程度予想できるものかもしれない。即ち、両系のハミルトニアンの違いは、スカラー場とゲージ場の相互作用の項だけに現われるからである。しかし、系の可積分性は、ポテンシャルの係数の大きさを敏感に反映するため、ここで得た結果は、自明ではない。

場に空間依存性を持たせた場合にも、この結果が成立するかは未だ調べていない。しかしながら、モノポール解の解析結果から推測して成立する可能性が高い。

一方、U(1)ヴォルテックス解の場合は、ポテンシャルのトポロジーが少し異なるので、慎重な解析が必要であり、未だ、結論を得ていない。

参考文献

1）S. G. Matinyan, E. B. Prokhorenko and G. K. Savvidy , JETP Lett. 44 (1986) 138; Nucl. Phys. B298 (1988) 414.

2) T. Kawabe and S. Ohta , Phys. Rev. D41(1990) 1983.

3) T. Kawabe and S. Ohta , Phys. Rev. D44 (1991) 1274.

4) T. Kawabe, Phys. Lett. B274 (1992) 399.

5) H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B61 (1973) 45.

6) F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, Phys. Rev. D30 (1084) 2212.